10.1. Снаряд, выпущенный со скоростью υ_0 из пушки, стоящей на горизонтальной поверхности, упал на расстоянии L от нее (при этом $\upsilon_0 > \sqrt{Lg}$). Определите возможное время t полета снаряда и угол α с горизонтальной поверхностью, под которым был выпущен снаряд. Ускорение свободного падения g, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

Вариант 1

Воспользуемся формулой расстояния от точки выстрела до точки падения:

$$L = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}; \qquad (1)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{Lg}{\upsilon_0^2} < 1; \qquad (2)$$

Этому синусу соответствуют как минимальный угол

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right), \quad (3)$$

так и максимальный

$$\alpha_{\max} = \frac{1}{2}\left(\pi - \arcsin\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)\right). \quad (4)$$

Далее находим время t как

$$t = \frac{L}{\upsilon_0 \cos\alpha} \qquad (5)$$

или, используя (1),

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (6)$$

Подставляя значения (3) и (4) в уравнение (6), и проводя тригонометрические преобразования, получаем два значения времени полета:

$$t_{\min} = \frac{2\upsilon_0 \sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)\right)}{g} = \frac{\upsilon_0\sqrt{2}}{g}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)^2}}; \qquad (6)$$

$$t_{\max} = \frac{2\upsilon_0 \sin\left(\frac{1}{2}\left(\pi - \arcsin\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)\right)\right)}{g} = \frac{\upsilon_0\sqrt{2}}{g}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)^2}}. \qquad (7)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для расстояния от точки выстрела до точки падения	1
2	Записано уравнение (2) для sin 2α.	1
3	Получены решения (3) и (4) для минимального и максимального угла	2
4	Записано уравнение (5) или (6) для зависимости времени полета от угла с горизонталью.	2

5	Получено выражение (6) для t_{min} (можно без тригонометрического преобразования к окончательному ответу)	2
6	Получено выражение (7) для t_{max} (можно без тригонометрического преобразования к окончательному ответу)	2
	Сумма	**10**

Вариант 2

Пусть x – горизонтальная ось, y – вертикальная. Запишем уравнения для точки падения снаряда для каждой из осей:

$$L = \upsilon_0 t \cos\alpha; \qquad (1)$$

$$0 = \upsilon_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Выразим из уравнения (2) величину $\sin\alpha$ и подставим в уравнение (1):

$$\sin\alpha = \frac{gt}{2\upsilon_0};$$

$$L = \upsilon_0 t\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \upsilon_0 t\sqrt{1-\left(\frac{gt}{2\upsilon_0}\right)^2}. \quad (3)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$L^2 = \upsilon_0^2 t^2\left(1-\frac{g^2t^2}{4\upsilon_0^2}\right).$$

Сделав замену $t^2 = z$, получим квадратное уравнение:

$$z^2 - \frac{4\upsilon_0^2}{g^2}z + \frac{4L^2}{g^2} = 0. \qquad (4)$$

Решаем его через половинный дискриминант:

$$D = \left(\frac{2\upsilon_0^2}{g^2}\right)^2 - \frac{4L^2}{g^2} = \frac{4\left(\upsilon_0^4 - L^2g^2\right)}{g^4};$$

$$z = t^2 = \frac{2\upsilon_0^2}{g^2} \pm \frac{2\sqrt{\upsilon_0^4 - L^2g^2}}{g^2}. \qquad (5)$$

Минимальному значению времени соответствует знак «минус»:

$$t_{\min} = \frac{\sqrt{2\upsilon_0^2 - 2\sqrt{\upsilon_0^4 - L^2g^2}}}{g} = \frac{\upsilon_0\sqrt{2}}{g}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)^2}}. \qquad (6)$$

Соответствующий этому времени угол также является минимальным:

$$\sin\alpha_{\min} = \frac{gt_{\min}}{2\upsilon_0} = \frac{g}{2\upsilon_0}\frac{\upsilon_0\sqrt{2}}{g}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)^2}}. \qquad (7)$$

$$\sin 2\alpha_{\min} = 2\sin\alpha_{\min}\cos\alpha_{\min} = \frac{Lg}{\upsilon_0^2}.$$

Навесной траектории соответствует максимальное время полета и максимальный угол:

$$t_{\max} = \frac{\sqrt{2\upsilon_0^2 + 2\sqrt{\upsilon_0^4 - L^2g^2}}}{g} = \frac{\upsilon_0\sqrt{2}}{g}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)^2}}; \qquad (8)$$

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{Lg}{\upsilon_0^2}\right)^2}}\,. \qquad (9)$$

$$\sin 2\alpha_{\max} = 2\sin\alpha_{\max}\cos\alpha_{\max} = \frac{Lg}{\upsilon_0^2}\,.$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для движения по оси x	1
2	Записано уравнение (2) для движения по оси y	1
3	Записано биквадратное (квадратное) уравнение (4) относительно t	2
4	Получено решение (5) квадратного уравнения	2
5	Записано выражение (6) для минимального времени	1
6	Записано выражение (7) для минимального угла	1
7	Записано выражение (8) для максимального времени	1
8	Записано выражение (9) для максимального угла	1
	Сумма	**10**